Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 19 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(1+1 Punkte)* Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

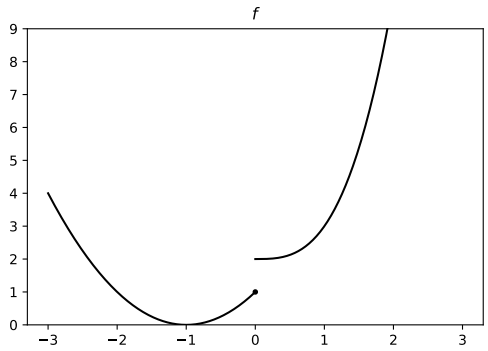
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x^3 + 2 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere den Graph und bestimme das Bild von f.

(b) Gib alle Intervalle $U \subset \mathbb{R}$ an, auf denen f injektiv ist.
Bestimme für diese Intervalle $U \subset \mathbb{R}$ jeweils die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$.

Lösung.

(a) Der Graph von f sieht wie folgt aus:



Es ist klar, dass der Bildbereich $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, \infty)$ ist. Wir zeigen nun, dass $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ gilt. Für $y \in [0, \infty)$ ist

$$y = (x+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \pm\sqrt{y} = x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} - 1.$$

Da $-(\sqrt{y} + 1) \leq -1$, gibt es somit für jedes $y \in [0, \infty)$ mindestens ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = y$. Also ist

$$\text{Bild}(f) := f(\mathbb{R}) = [0, \infty).$$

(b) Wir geben die beiden maximalen Intervalle an, auf denen f injektiv ist. Alle weiteren Intervalle erhält man dann als Teilintervalle von diesen; die jeweiligen Umkehrfunktionen findet man entsprechend durch Einschränken der unten bestimmten Umkehrfunktionen. Aus Teil (a) folgt, dass f auf dem Intervall $(-\infty, -1]$ injektiv ist. Das Intervall $(-\infty, -1]$ ist ein maximales Intervall, auf dem f injektiv ist, weil für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 1$ gilt, dass $f(-1 + \varepsilon) = f(-1 - \varepsilon)$. Die gesuchte Umkehrfunktion $g_1 := f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow (-\infty, -1]$ ist definiert durch

$$g_1(y) = -\sqrt{y} - 1.$$

Wir überzeugen uns nun davon, dass auch $[-1, \infty)$ ein maximales Intervall ist, auf dem f injektiv ist. Wegen Teil (a) und

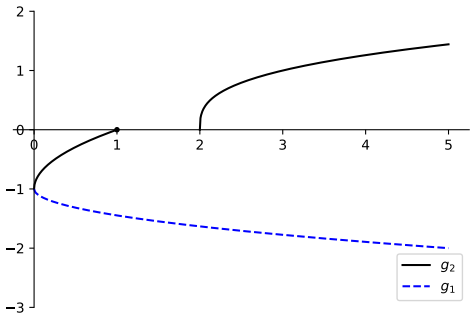
$$y = x^3 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad y - 2 = x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[3]{y-2} = x$$

für $y > 2$ folgt die Injektivität von f auf dem Intervall $[-1, \infty)$. Aus Teil (a) folgt außerdem sofort $f([-1, 0]) = [0, 1]$ und damit

$$f([-1, \infty)) = f([-1, 0]) \cup f((0, \infty)) = [0, 1] \cup (2, \infty).$$

Die gesuchte Umkehrfunktion für dieses Intervall ist somit $g_2 := f^{-1} : [0, 1] \cup (2, \infty) \longrightarrow [-1, \infty]$,

$$g_2(y) = \begin{cases} \sqrt{y} - 1 & \text{falls } 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt[3]{y-2} & \text{falls } y > 2. \end{cases}$$



■

Aufgabe 2: *(2+1+1 Punkte)* Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so heißt f *ungerade*.

(a) Zeige, dass sich jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ darstellen lässt als Summe

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

einer *geraden* Funktion $f_g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und einer *ungeraden* Funktion $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass nur die Nullfunktion gerade *und* ungerade ist.

(c) Folgere aus (b), dass die Funktionen f_g und f_u aus (a) eindeutig bestimmt sind.

Lösung.

(a) Es gilt offenbar

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Setze nun $f_g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ und $f_u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Dann gilt

$$f_g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_g(x)\,,$$

f_g ist also eine gerade Funktion. Außerdem gilt

$$f_u(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_u(x)\,,$$

f_u ist also eine ungerade Funktion.

(b) Ist f konstant Null, also $f(x) = 0$, dann ist f offensichtlich sowohl gerade als auch ungerade. Ist umgekehrt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sowohl gerade als auch ungerade, so gilt $\forall x \in \mathbb{R}$, dass

$$f(x) = -f(-x) = -f(x).$$

Die erste Gleichung gilt hier, weil f ungerade ist; die zweite Gleichung folgt, weil f gerade ist. Also muss $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

(c) Die Zerlegung in den geraden und ungeraden Anteil ist eindeutig, denn für eine beliebige andere derartige Zerlegung $f(x) = \tilde{f}_g(x) + \tilde{f}_u(x)$ gilt

$$0 = f - f = f_g + f_u - \tilde{f}_g - \tilde{f}_u$$

und damit folgt

$$f_g - \tilde{f}_g = \tilde{f}_u - f_u\,.$$

Die Funktion auf der linken Seite ist die Summe zweier gerader Funktionen, ist also selbst gerade. Die Funktion auf der rechten Seite ist ungerade als Summe zweier ungerader Funktionen. Da beide gleich sind, sind sie gleichzeitig gerade und ungerade und damit konstant Null. Also gilt $\tilde{f}_g = f_g$ und $\tilde{f}_u = f_u$.

■

Aufgabe 3: *(4 Punkte)* Für nichtleere Mengen A, B, C seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Lösung.

(a) Seien $x, y \in A$, $x \neq y$. Wegen der Injektivität von f ist dann $f(x) \neq f(y)$ und wegen der Injektivität von g folgt

$$(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y).$$

Also ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sei $c \in C$. Wegen der Surjektivität von g gibt es ein $b \in B$ mit $c = g(b)$. Wegen der Surjektivität von f folgt weiter, dass es ein $a \in A$ gibt, mit $b = f(a)$. Wir haben also

$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

und somit ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Angenommen, f wäre nicht injektiv, dann gäbe es $x, y \in A$, $x \neq y$, mit $f(x) = f(y)$. Damit wäre aber auch $g(f(x)) = g(f(y))$. Aus der Injektivität von $g \circ f$ aber, dass

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y) = g(f(y)).$$

Widerspruch!

(d) Sei $c \in C$. Wegen der Surjektivität von $g \circ f$ gibt es dann ein $a \in A$, sodass

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c.$$

Schreiben wir $b := f(a) \in B$, so ist also $c = g(b)$ und damit ist auch g surjektiv.

■